Algèbre linéaire - MATH111(f)
Semestre d'automne — 2024-2025

Série 6: Déterminants

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) **calculer le déterminant** d'une matrice carrée, en particulier, **au moyen des opérations élémentaires** ;

(O.2) connaître et utiliser des **propriétés du déterminant**, en particulier le **lien avec l'inversibilité** ;

(O.3) connaître le **lien entre le déterminant et les notions d'aire et volume**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- déterminant

Noyau d'exercices

1.1 Premiers calculs

Exercice 1 (Déterminants et matrices élémentaires I)
Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ non nul. Indiquer à quelle opération élémentaire chaque matrice correspond et calculer le déterminant respectif.

Exercice 2 (Déterminants et matrices élémentaires II)
Sachant que

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants

$$\det\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Calculs de déterminants I)
Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \text{et } D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Déterminant et inversibilité

Exercice 4 (Déterminant d'une matrice de taille 2)
Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ la matrice A est-elle inversible ?

Pour le noyau : item (a).

Exercice 5 (Déterminant des matrices de taille 3 et 4)

(a) Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

pour $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que $\det(A) = (b-a)(c-b)(c-a)$. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice A est-elle inversible ?

(b) Trouver une formule pour le déterminant de la matrice de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 (Propriétés et applications du déterminant)
Montrer les propriétés suivantes :

(a) si A est une matrice inversible, alors $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$;
(b) si A et P sont des matrices inversibles de taille n, alors $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$;
(c) si U est une matrice carrée de taille n telle que $U^{\mathrm{T}}U = \mathrm{I}_n$, alors $\det(U) \in \{-1, 1\}$;
(d) si A est une matrice carrée telle que $\det(A^3) = 0$, alors A est non inversible.

1.3 Interprétation géométrique du déterminant

Exercice 7 (Déterminant et volume)
Calculer le volume du parallélépipède dont un sommet se trouve à l'origine et les trois sommets adjacents se trouvent en $(1,4,0)$, $(-2,-5,2)$ et $(-1,2,-1)$.

Pour compléter la pratique

2.1 Premiers calculs

Exercice 8 (Calculs de déterminants II)
Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Interprétation géométrique du déterminant

Exercice théorique!

Exercice 9 (Déterminant et aire)
Le but de cet exercice est de prouver l'identité

$$\text{Aire du parallélogramme défini par } \mathbf{a}_1 \text{ et } \mathbf{a}_2 = \left|\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\right|,$$

pour tous $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ dans $\mathbb{R}^2$.

(a) Soient $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ est la même que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2 + \lambda \mathbf{a}_1$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un scalaire.

(b) Soit $A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$ une matrice carrée de taille 2 et soit $B = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]$ une matrice obtenue de A en effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes de type I et III (*i.e.* transposer des colonnes, et ajouter à une colonne le multiple d'une autre colonne, resp.), alors

$$\text{Aire du parallélogramme défini par } \mathbf{a}_1 \text{ et } \mathbf{a}_2 = \text{Aire du parallélogramme défini par } \mathbf{b}_1 \text{ et } \mathbf{b}_2.$$

(c) Montrer que si A est une matrice carrée de taille 2, alors l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs colonnes de A est égale à $|\det(A)|$.
Indication : Essayer de se ramener au cas des matrices diagonales en effectuant des opérations élémentaires qui ne modifient ni la valeur absolue du déterminant ni l'aire.

2.3 Encore plus d'exercices pour pratiquer

Exercice 10 (V/F sur le déterminant I)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
(a) Si B est obtenue en intervertissant deux lignes de A, alors $\det(B) = \det(A)$.	☐	☐
(b) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det(A) = 0$.	☐	☐
(c) Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A.	☐	☐
(d) Si A est une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$, alors A est inversible.	☐	☐

Exercice 11 (V/F sur le déterminant II)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
(a) Si deux lignes d'une matrice carrée A de taille 7 sont les mêmes, alors $\det(A) = 0$.	☐	☐
(b) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$.	☐	☐
(c) Si A et B sont des matrices carrées de taille n telles que $\det(A) = 2$ et $\det(B) = 5$, alors $\det(A + B) = 7$.	☐	☐
(d) Si A est une matrice carrée triangulaire supérieure, alors A est inversible.	☐	☐

Exercice 12 (QCM sur inversibilité d'une matrice)
Considérons la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors A_α est singulière (*i.e.* non inversible) précisément si

☐ $\alpha \notin \{-1, 1\}$ ☐ $\alpha \in \{-1, 1\}$ ☐ $\alpha \in \{1, 3\}$ ☐ $\alpha \notin \{1, 3\}$

Exercice 13 (QCM sur déterminant, matrices élémentaires et inversibilité)
Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) Soit A et B deux matrices carrées inversibles de taille 3. On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3. On définit la matrice $D = C(2B)$. Alors

☐ $\det(D) = 30 \det(A) \det(B)$;

☐ $\det(D) = -60 \det(A) \det(B)$;

☐ $\det(D) = 90 \det(A) \det(B)$;

☐ $\det(D) = -120 \det(A) \det(B)$.

(b) Soit A et B deux matrices carrées inversibles de taille 3. On forme la matrice C à partir de A en multipliant par 4 la matrice A, puis en échangeant les lignes 1 et 2. On obtient la matrice D à partir de B en multipliant par 4 la deuxième colonne et en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième. Alors

- ☐ $\det(CD^{-1}) = -4\det(A)\det(B)^{-1}$;
- ☐ $\det(CD^{-1}) = -\det(A)\det(B)^{-1}$;
- ☐ $\det(CD^{-1}) = -16\det(A)\det(B)^{-1}$;
- ☐ $\det(CD^{-1}) = -\frac{1}{4}\det(A)\det(B)^{-1}$.